表現環の構造について (有限群の群環と表現論)

岩田, 恵司

数理解析研究所講究録
111巻 1971年 35-46

表現環の構造について

東京教育大学大学院　岩田恵司

Gを有限群とし　Rを Dedekind domain とする。以後 RG-加群については　R-加群として　有限生成, torsion free なものだけを扱う。RG-加群 M, N について, $M \otimes_R N$ は G の作用を $g(m\otimes n) = gm\otimes gn$, $g\in G$, $m\in M$, $n\in N$ とすることにより RG-加群になる, これを $M\otimes N$ と書く。RG-加群の同型類を $[\ ]$ を付して表わす。いま RG-加群の同型類を生成元とし, 基本関係 $\{[M]=[M']+[M''] \mid M\cong M'\oplus M''\}$ で定義されるアーベル群は　更に　$[M][N]=[M\otimes N]$ と定義することにより環の構造をもつ, これを群 G の (R上の) 表現環といい $a(RG)$ で表わす。$\mathbb{C}$-algebra $\mathbb{C}\otimes a(RG)$ を $A(RG)$ で表わす。表現環の構造については Lam, Green, Conlon, 等によりいくつかの結果が得られているが, それらの概略をここに紹介する。

§1

本節を通して，Rは complete discrete valuation ring とし，$\mathfrak{p}$をその極大イデアル．$\bar{R}=R/\mathfrak{p}$．$p=\mathrm{char}\,\bar{R}$，とする。
Gの部分群 H, K について，もし $x^{-1}Kx\subseteq H$ ($^{\exists}x\in G$) ならば このとき $K\leq H$ と表わす。RH-加群 L に対して RG-加群 $RG\otimes_{RH}L$ を L^G で表わすことにする。

<u>定義</u>． Gの部分群Dについて，$M\mid L^G$，$^{\exists}L$: RD-module，なる様な $[M]$ で生成される $a(RG)$ の加法的部分群は，更に $a(RG)$ のイデアルになる，これを $a_D(RG)$ で表わし，環 $a_D(RG)/\sum_{H<D} a_H(RG)$ を $w_D(RG)$ で表わす。又それらを複素数体まで係数拡大したものを それぞれ $A_D(RG)$, $W_D(RG)$ とする。

<u>定理 [1]</u> (Green [2])

$$W_D(RG)\approx W_D(RN(D)) \quad : \text{ ring isomorphic}$$

(ここに $N(D)$ は D の G における正規化群)

証明は省略するが ここでの同型対応は $t([M])=[M^G]$ で定義される transfer map $t: A(R\cdot N(D))\longrightarrow A(R\cdot G)$ から自然に誘導された対応で与えられる。

注意． D が p-部分群でない場合は $w_D(RG)=0$

補題 [2]

$F([M]) = [\bar{R}G \otimes_{RG} M]$ によって定義される自然な準同型 $F : A(RG) \longrightarrow A(\bar{R}G)$ を考える。$\{[X]-[X']-[X''] \mid {}^{\exists} 0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ $\bar{R}G$- exact sequence$\}$ で生成される $A(\bar{R}G)$ のイデアルを $A'(\bar{R}G)$ とし，$A'(RG) = F^{-1}(A'(\bar{R}G))$ とするとき

$$A(RG) = A_{(1)}(RG) \oplus A^{(1)}(RG)$$

とイデアル分解される。

証明　作り方より $A_{(1)}(\bar{R}G)A^{(1)}(\bar{R}G)=0$ 又 $A(RG)/A^{(1)}(RG) \approx G_0(\bar{R}G) \approx A_{(1)}(\bar{R}G) \approx A_{(1)}(RG)$。これより $A_{(1)}(RG)A^{(1)}(RG)=0$。準同型 $F^* : A(RG) \xrightarrow{F} A(\bar{R}G) \xrightarrow{\varphi} G_0(\bar{R}G)$ が $A_{(1)}(RG)$ の上で同型であることに注意すれば，${}^{\exists}J_G \in A_{(1)}(RG)$ $s.th.$ $F^*(J_G) = F^*(1_G)$，ここに 1_G は $A(RG)$ の単位元，について $1_G = J_G + (1_G - J_G)$ と直交冪等元への分解が得られる。　(Q.E.D)

$H \triangleleft G$ とする。準同型 $G \longrightarrow G/H$ は自然に環準同型 $\tau : A(RG/H) \longrightarrow A(RG)$ を引き起こすが $\tau(A_{(1)}(RG/H)) \subset A_H(RG)$ である。そこで $\tau(J_{G/H})$，($J_{G/H}$ は $A_{(1)}(RG/H)$ の idempotent generator)，を互び同じ記号 $J_{G/H}$ で表わすことにする。

補題 [3]

$J_{G/H}$ は $A_H(RG)$ の idempotent generator である。

証明　$\bar{R}$は代数的に閉じている，と仮定してよい。

証明には入る前に少し準備をしておく。$\bar{R}$が代数的に閉じているから，Gの representation group $\hat{G}$ が存在して，Gの上のすべての twisted group algebra は $\bar{R}\hat{G}$ の両側イデアルとして実現される。そこでいまその分解を

$$\bar{R}\hat{G} = B_0 \oplus \cdots \oplus B_n \qquad B_0 = \bar{R}G$$

とすると，これにより，$\mathfrak{C}$-space への分解

$$A(\bar{R}\hat{G}) = A(B_0) \oplus \cdots \oplus A(B_n)$$

$$A_{(1)}(\bar{R}\hat{G}) = A_{(1)}(B_0) \oplus \cdots \oplus A_{(1)}(B_n)$$

$$A^{(1)}(\bar{R}\hat{G}) = A^{(1)}(B_0) \oplus \cdots \oplus A^{(1)}(B_n)$$

$$G_0(\bar{R}\hat{G}) = G_0(B_0) \oplus \cdots \oplus G_0(B_n)$$

が引き起こされる。又，$\bar{R}\hat{G}$ の Cartan matrix が non-singular であることより $\varphi_i : A_{(1)}(B_i) \xrightarrow{\sim} G_0(B_i)$：$\mathfrak{C}$-isomorphic となる。$B_0$, B_i －加群 M, N は自然に $\bar{R}\hat{G}$－加群とみれるが，$\bar{R}\hat{G}$－加群として $M \otimes N$ を考えると $M \otimes N$ は B_i－加群である。これによって $A(B_0)$, $A_{(1)}(B_0)$, $G_0(B_0)$ は各々 $A(\bar{R}\hat{G})$, $A_{(1)}(\bar{R}\hat{G})$, $G_0(\bar{R}\hat{G})$ の $\mathfrak{C}$-sub-algebra になることが分る。いま $A_{(1)}(\bar{R}G)$, $A_{(1)}(\bar{R}\hat{G})$ の idempotent generator をそれぞれ J_G, $J_{\hat{G}}$ とすると $J_{\hat{G}} = J_G \in A_{(1)}(B_0)$ なることが分る，これより $xJ_G = x$，${}^{\forall}x \in A_{(1)}(B_i)$ である。

absolutely indecomposable RH－加群 L をとり

L の G における stabiliser を S，$\{[M] \in A(RG) \mid M \mid L^G\}$ で生成された $A_H(RG)$ の $\mathbb{C}$-subspace を $A(L^G)$ とすると，計算は省略するが，S/H の $\bar{R}$ 上の twisted group algebra B_L と $\mathbb{C}$-linear homomorphism $F_L : A_H(RG) = \oplus_L A(L^G) \longrightarrow A_{(1)}(B_L)$ が構成され，次の条件を満足する。

$$F_L : \quad A(L^G) \xrightarrow{\sim} A_{(1)}(B_L) \quad : \mathbb{C}\text{-isomorphic}.$$

$$F_L(xy) = F_L(x)\, F_{1_H}(y) \quad , {}^{\forall}x \in A_H(RG),\ {}^{\forall}y \in A_{(1)}(RG/H)$$

従って ${}^{\forall}x \in A(L^G)$ について

$$\begin{aligned} F_L(x J_{G/H}) &= F_L(x)\, F_{1_H}(J_{G/H}) \\ &= F_L(x)\, J_{S/H} \\ &= F_L(x) \end{aligned}$$

故に $\quad x J_{G/H} = x$ (Q.E.D)

以上の結果にもとずいて次の定理が導かれる。

<u>定理 [4]</u> (Conlon [3])

G の部分群 D について

$$A_D(RG) \Leftarrow\!\!\oplus\; A(RG)$$

$$A_D(RG) = A'_D(RG) \oplus A''_D(RG) \ , \qquad A''_D(RG) \cong W_D(RG)$$

$$\text{ここに} \quad A'_D(RG) = \sum_{D' < D} A_{D'}(RG)$$

証明 $|D| = 1$ のときは証明されている。$|D|$ に関する帰納法で証明する。帰納法の仮定により $A'_D(RG) \Leftarrow\!\!\oplus A(RG)$ 従って補題 [3] により $D \trianglelefteq G$ の場合について証明すればよい

$N(D) \neq G$ より $A_D(R\cdot N(D))$ については定理は成立。従って

$$
\begin{aligned}
A_D(RG)/A'_D(RG) &= W_D(RG) \\
&= W_D(R\cdot N(D)) \\
&\cong A''_D(R\cdot N(D)) \oplus A(R\cdot N(D))
\end{aligned}
$$

より $A_D(RG)/A'_D(RG)$ は identity element を持つ。

(Q.E.D)

§ 2

R は §1 と同じく complete discrete valuation ring とする。ここでは $a(RG)$ の nilpotent element について調べる。
$D \triangleleft G$ とし，H を D を含む G の部分群とする。

inclusion map i_H $H \hookrightarrow G$ は

$$
\begin{array}{lll}
\text{ring hom.} & i_H^* : & G_0(R\,G/D) \longrightarrow G_0(R\,H/D) \\
& I_H^* : & a_D(RG) \longrightarrow a_D(RH) \\
\text{add. hom.} & i_{*H} : & G_0(R\cdot H/D) \longrightarrow G_0(R\cdot G/D) \\
& I_{*H} : & a_D(RH) \longrightarrow a_D(RG)
\end{array}
$$

を誘導する。 $a_D(RH)$ は $[M]\cdot[S] = [M_H \otimes S]$，

M : $R\,H/D$-加群，S ; D-projective RH-加群，M_H ; M を $H \longrightarrow H/D$ を通して RH-加群としたもの，とすることによって $a(R\,H/D)$-加群となるが，更に $G^0(R\cdot H/D)$-加群でもあることが分る。

補題 [5]

$\Delta = \{\text{subgroup } H \text{ of } G \mid H \supset D,\ H/D \text{ cyclic}\}$ とするとき。もし $\Delta \ni {}^\forall H$ に対して $a_D(RH)$ が 0 以外の nilpotent element をもたないならば、$a_D(RG)$ も持たない。

証明　$x^n = 0$，$x \in a_D(RG)$ とすると，${}^\forall H \in \Delta$ に対して　$0 = I_H^*(x^n) = I_H^*(x)^n \in a_D(RH)$。従って

$x \in \bigcap_{H \in \Delta} \mathrm{Ker}\, I_H^*$。さてここで

$$[G:D]^2 G_0(R\, G/D) \subset \sum_{H \in \Delta} \mathrm{image}\ i_{*H}$$

であることに注意すれば

$$
\begin{aligned}
[G:D]^2 x &= [G:D]^2 \cdot 1_{G/D} \cdot x \quad , \quad 1_{G/D} : G_0(R\, G/D) \text{ の単位元} \\
&= \sum_{H_j \in \Delta} a_j\, i_{*H_j}(y_j) x \\
&\qquad\qquad {}^\exists H_j \in \Delta,\ {}^\exists y_j \in G_0(R\cdot H_j/D) \\
&\qquad\qquad {}^\exists a_j : \text{integer} \\
&= \sum a_j I_{*H_j}(y_j I_{H_j}^*(x)) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

従って $x = 0$　　　　(Q.E.D)

定理 [6]　(Lam [5])

次の条件を満足する G の部分群 H のすべてから成る集合を Φ とする．　　$H^{(p)} \triangleleft H$　，$H/H^{(p)}$: cyclic

ここに $H^{(p)}$: p-Sylow subgroup of H

もし 玉∋$^{\forall}H$ に対して $a(RH)$ が 0 以外の nilpotent element をもたないならば，$a(RG)$ も non-zero nil. el. を持たない。

証明　　$|G|=1$ のときは明らか。$|G|$ に関する帰納法で証明する。D を G の任意の p-部分群とする。もし $D \not\triangleleft G$ なら帰納法の仮定により $a(R\cdot N(D))$ は non-zero nil. ele. を持たない，従って $\omega_D(RG)$ $(\simeq \omega_D(R\cdot N(D)))$ も non-zero nil. ele. をもたない。$D \triangleleft G$ の場合は $^{\forall}H \in \Delta$ とすると，$D \subset H^{(p)} \subset H$，$H/D$ cyclic，従って $H \in$ 玉 となり $a(RH)$ は non-zero nil. el. をもたない。従って補題により，$a_D(RG)$ 故に $\omega_D(RG)$ も non-zero nil. el. を持たない。従って定理[4] により示された。　(Q.E.D)

§3

本節では Burnside algebra の分解から誘導された，表現環のイデアル分解を紹介する。

定義.　　RG-加群の category を $\mathbb{M}(RG)$ とし $\mathbb{L} = \bigcup_{D \leq G} \mathbb{M}(RD)$ とする。M が RD-加群であることを $T_M = D$ と書くことにする。$\mathbb{L} \ni M, M'$ について $M \cong {}^{x}M'$ $^{\exists}x \in G$ のとき $M \sim M'$ と書き，関係 ~ による M の class を $\langle M \rangle$ で表わす。$\langle M \rangle$; $M \in \mathbb{L}$ で生成された free abelian group は 生成元の間の積を

$$\langle M\rangle\langle N\rangle = \sum_{x} \langle M_{T_M \cap {}^{x}T_N} \otimes {}^{x}N_{T_M \cap T_N} \rangle$$

x は G の (T_M, T_N)－両側剰余類の代表系を動く

と定義することにより環になる，これを Burnside ring といい $b(RG)$ で表わす。$B(RG) = \mathbb{C} \otimes b(RG)$ とする。

G の部分群 H について $\{\langle M\rangle \mid T_M \leq H\}$, $\{\langle M\rangle \mid T_M \lneq H\}$ で生成される $b(RG)$ の additive subgroup をそれぞれ $b_H(RG)$, $b'_H(RG)$ とすると，これらは $b(RG)$ のイデアルであることが分る。$B_H(RG) = \mathbb{C} \otimes b_H(RG)$, $B'_H(RG) = \mathbb{C} \otimes b'_H(RG)$ とする。

<u>定理[7]</u> (Conlon[4])

$$b_D(RG)/b'_D(RG) \xrightarrow{\sim} b_D(R \cdot N(D))/b'_D(R \cdot N(D))$$

: ring isomorphic

証明　$b_D(RG) \longrightarrow b_D(R \cdot N(D))$ から誘導された additive hom. r^* : $b_D(RG)/b'_D(RG) \longrightarrow b_D(R \cdot N(D))/b'_D(R \cdot N(D))$ について，r^* は base を base に対応させているから additive isom.

しかも $M, M' \in \mathbb{M}(R \cdot D)$ について

$$\langle M\rangle\langle M'\rangle = \sum_{DxD \subset G} \langle M' \otimes {}^{x}M\rangle$$

$$\equiv \sum_{DxD \subset N(D)} \langle M' \otimes {}^{x}M\rangle \quad \mathrm{mod}\ b'_D(RG)$$

従って r^*: ring isomorphism

(Q.E.D)

$M \in \mathbb{L}$ とするとき, $T_M = S$, $\nu_S = [N(S):S]$ とおくと,

$$\langle 1_S\rangle\langle M\rangle = \sum_{SxS\subset G} \langle 1_S \otimes {}^x M\rangle$$

$$\equiv \sum_{SxS\subset N(S)} \langle 1_S \otimes M\rangle \mod b'_D(RG)$$

$$\equiv \nu_S \langle M\rangle \mod b'_D(RG)$$

これに注意して $|D|$ に関する帰納法により次の定理が証明される。

<u>定理[8]</u> (Conlon[4])

$B_D(RG)$ は $B(RG)$ のイデアル因子である。

$$B_D(RG) = B'_D(RG) \oplus B''_D(RG), \quad {}^\exists B''_D(RG) \cong B_D(RG)/B'_D(RG)$$

特に Burnside alg は

$$B(RG) = \oplus_{D\le G} B''_D(RG), \quad B''_D(RG) \cong B_D(RG)/B'_D(RG)$$

とイデアル分解される。

(証明略)

いま自然に algebra epimorphism $\psi : B(RG) \longrightarrow A(RG)$, $\langle M\rangle \longmapsto [M^G]$ が構成されるが, そこで,

$A^*_D(RG) = \psi(B_D(RG))$, $A^{*\prime}_D(RG) = \psi(B'_D(RG))$ とおく。

このとき次が成立する。

<u>定理[9]</u> (Conlon[4])

$$A^*_D(RG) = A^{*\prime}_D(RG) \oplus A^{*\prime\prime}_D(RG)$$

$$A^*_D(RG) \supseteq A^{*\prime\prime}_D(RG) \cong A^*_D(RG)/A^{*\prime}_D(RG) \cong A^*_D(R\cdot N(D))/A^{*\prime}_D(R\cdot N(D))$$

特に $A(RG) = \oplus_{D\le G} A^{*\prime\prime}_D(RG)$

証明

$\langle M\rangle - \langle M'\rangle - \langle M''\rangle$; $T_M = T_{M'} = T_{M''}$, $M \cong M' \oplus M''$, $\langle N\rangle - \langle N^G\rangle$ で生成された $b(RG)$ の additive subgroup は ideal になる，これを $j(RG)$ で表わすと $\mathrm{Ker}\,\psi = \mathbb{C} \otimes j(RG)$ であることが分る。$\mathbb{C} \otimes j(RG) \cap B_D(RG)$ の生成元を $\mathrm{mod}\, B_D'(RG)$ で考えると $\langle M\rangle - \langle M'\rangle - \langle M''\rangle$, $\langle N^P\rangle$，ここに，$T_M = T_{M'} = T_{M''} = D$, $M \cong M' \oplus M''$, $T_N < D$，である．全く同じ元が $\mathrm{mod}\, B_D'(R \cdot N(D))$ での $\mathbb{C} \otimes j(R \cdot N(D)) \cap B_D(R \cdot N(D))$ の生成元である。従って定理[7][8]により示された。

(Q.E.D)

文献

[1] C. W. Curtis and I. Reiner ; Representation theory of finite groups and associative algebras (Interscience 1962)

[2] J. A. Green ; A transfer theorem for modular representations (J. of Alg 1 (1964))

[3] S. B. Conlon ; Relative components of Representations (J. Alg. 8 (1968))

[4] S. B. Conlon ; Decompositions induced from the Burnside algebra (J. Alg 10 (1968))

[5] T. Y. Lam ; A theorem on Green's modular representation (J Alg (1970))